Α.Μ.	ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΕΤΟΣ ΕΓΓΡΑΦΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΟΛΙΑΣ — ΚΥΡΙΑΚΟΣ Γ. ΜΑΥΡΙΔΗΣ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
22 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

1. **(10%)** Ας είναι A ένα μη κενό και **κάτω** φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του A τέτοια ώστε $\lim a_n = \inf A$.

2. **(10%)** Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια **αύξουσα** και **άνω** φραγμένη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και ότι είναι πραγματικός αριθμός.

3. **(10%)** Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

4. **(15%)** Ας είναι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία με

$$a_n \geq 0, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}, \quad \text{και} \quad \lim a_n = x \in \mathbb{R}.$$

(i) Δείξτε ότι $x \geq 0$.

(ii) Με χρήση του **ορισμού**, δείξτε ότι $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{x}$. Διακρίνετε τις περιπτώσεις $x = 0$ και $x > 0$.

5. **(15%)** Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1 = -1$ και $a_{n+1} = -2\sqrt{-3a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το $\lim a_n$ υπάρχει και υπολογίστε το.

6. **(15%)** Ας είναι $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο **συνεχείς** συναρτήσεις και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathbb{Q}, \\ f_2(x), & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

(i) Χρησιμοποιώντας τον $(\boldsymbol{\epsilon - \delta})$ ορισμό της συνέχειας, δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, ισχύει ότι η g **είναι** συνεχής στο x_0.

(ii) Χρησιμοποιώντας τον **ακολουθιακό** ορισμό (χαρακτηρισμό) της συνέχειας, δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, ισχύει ότι η g **δεν είναι** συνεχής στο x_0.

7. **(15%)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}, \quad x \in A.$$

Προσδιορίστε το ευρύτερο δυνατό σύνολο $\boldsymbol{A}$ και μελετήστε την f ως προς τη **μονοτονία**, τα **ακρότατα**, την **κυρτότητα**, τα **σημεία καμπής** και τις **ασύμπτωτες**. Επίσης σχεδιάστε, κατά προσέγγιση, τη **γραφική της παράσταση**.

8. **(10%)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [\alpha, \gamma] \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

(i) η f είναι **δυο φορές παραγωγίσιμη**.

(ii) υπάρχει $\beta \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε

$$(f(\gamma) - f(\beta)) \cdot (\beta - \alpha) = (f(\beta) - f(\alpha)) \cdot (\gamma - \beta).$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.